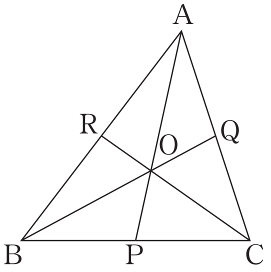
PART5 チェバの定理，メネラウスの定理

要点① チェバの定理

右図の △ABC において

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\underline{\qquad\qquad},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}$$



が成り立つ。3つの等式を辺々かけて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}$$

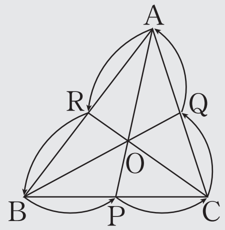
が成り立つ。

よって，三角形とその内部の1点について，次のことが成り立つ。

チェバの定理

△ABC の内部にある点 O と，三角形の 3 つの頂点 A，B，C を結んだ直線 AO, BO, CO が, 3 辺 BC, CA, AB とそれぞれ点 P, Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



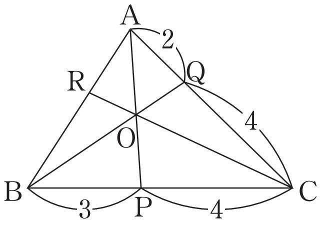
※チェバの定理は，点 O が △ABC の外部にある場合にも成り立つ。

例 右の図の △ABC において，AR：RB を求める。

チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1\quad \text{すなわち}\ \frac{\quad}{\quad}\cdot\frac{\quad}{\quad}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって $\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\quad}{\quad}$ より　AR：RB＝



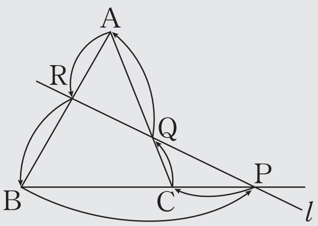
要点② メネラウスの定理

三角形と1つの直線について，次のことが成り立つ。

メネラウスの定理

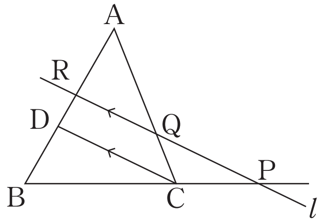
△ABC の頂点を通らない直線 l が，△ABC の辺 BC, CA，AB およびその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



（証明）

頂点 C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とすると



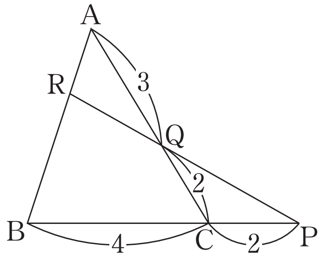
PR // CD より　$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{BR}{RD}$

QR // CD より　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{DR}{RA}$

よって　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{BR}{RD}\cdot\dfrac{DR}{RA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

※メネラウスの定理は，△ABC の3辺すべての延長が直線 l と交わる場合にも成り立つ。

例　右の図の △ABC において，AR：RB を求める。

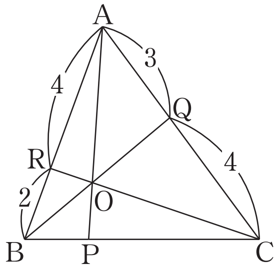


メネラウスの定理より

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　すなわち　$\dfrac{\quad}{\quad}\cdot\dfrac{\quad}{\quad}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

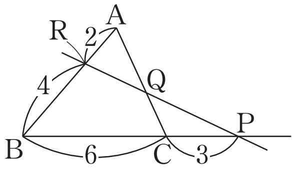
よって　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{\quad}{\quad}$ より　AR：RB =

5 (1) 右の図において，BP：PC を求めよ。

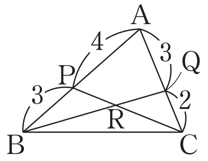


(2) 下の図において，次の比を求めよ。

(i) CQ：QA



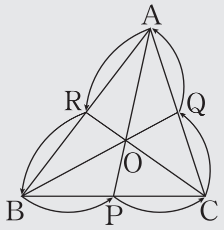
(ii) PR：RC



Point Pickup

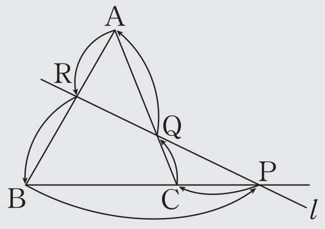
チェバの定理，メネラウスの定理

チェバの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

メネラウスの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

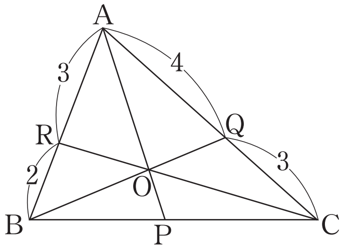
・3頂点から引いた直線が1点で交わる → チェバの定理

・三角形と1直線 → メネラウスの定理

第 7 講 PART5 確認問題

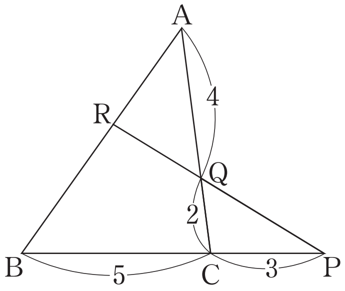
次の図において，与えられた線分の比を最も簡単な整数の比で表せ。

1



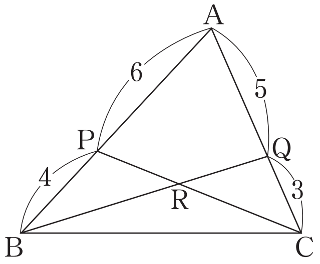
BP：PC＝ ア ： イ

2



AR：RB＝ ウ ： エ

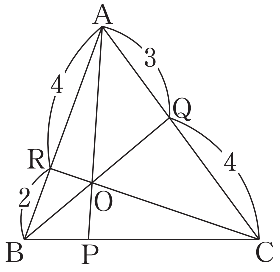
3



PR：RC＝ オ ： カ

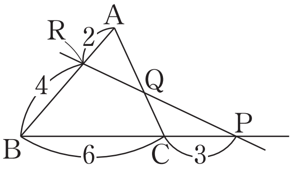
PART5 チェバの定理，メネラウスの定理

5 (1) 右の図において，BP：PC を求めよ。

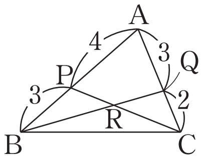


(2) 下の図において，次の比を求めよ。

(i) CQ：QA



(ii) PR：RC



[解答]

(1) チェバの定理より $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ すなわち $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=1$

よって $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{8}$ より BP：PC＝3：8

(2)(i) メネラウスの定理より $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ すなわち $\dfrac{9}{3}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{2}{4}=1$

よって $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{3}$ より CQ：QA＝2：3

(ii) メネラウスの定理より $\dfrac{AB}{BP}\cdot\dfrac{PR}{RC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$ すなわち $\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{PR}{RC}\cdot\dfrac{2}{3}=1$

よって $\dfrac{PR}{RC}=\dfrac{9}{14}$ より PR：RC＝9：14

第 7 講　PART5 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：8，イ：9

[解説]

チェバの定理より，[A]

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

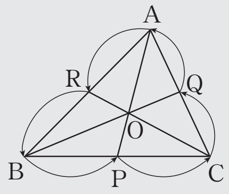
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{BP}{PC}=\frac{8}{9}$$

よって，

$$BP：PC=\mathbf{8：9}$$

[A]　チェバの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

2 **[正解]** ウ：3，エ：4

[解説]

メネラウスの定理より，[B]

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

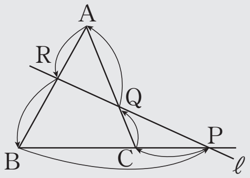
$$\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{3}{4}$$

よって，

$$AR：RB=\mathbf{3：4}$$

[B]　メネラウスの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

3 [正解] オ：2，カ：3

[解説]

メネラウスの定理より，

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1 \quad \text{[C]}$$

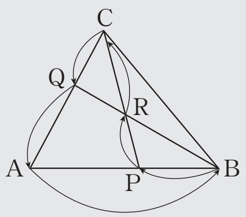
$$\frac{10}{4}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{3}{5}=1$$

$$\frac{PR}{RC}=\frac{2}{3}$$

よって，

$$PR:RC=\mathbf{2}:\mathbf{3}$$

[C]



$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$